

### 6.3.DZIAŁANIA NA WYRAŻENIACH WYMIERNYCH

Działania na wyrażeniach wymiernych wykonujemy analogicznie jak działania na ułamkach.

**Dodawanie i odejmowanie** wyrażen wymiernych polega na sprowadzeniu ich do wspólnego mianownika , a następnie dodaniu lub odjęciu liczników i przepisaniu wspólnego mianownika.

Przykład 6.3.1 Wykonaj działania:

a)  $\frac{4x}{x-4} - \frac{-x}{x+2}$

Rozwiązanie	Komentarz
$\frac{4x}{x-4} - \frac{-x}{x+2} =$ $\frac{4x(x+2)}{(x-4)(x+2)} - \frac{-x(x-4)}{(x-4)(x+2)} =$	Wyrażenia sprowadzamy do wspólnego mianownika. Najmniejszym wspólnym mianownikiem jest $(x-4)(x+2)$ . Dlatego wyrażenie $\frac{4x}{x-4}$ rozszerzamy przez $x+2$ , natomiast wyrażenie $\frac{-x}{x+2}$ przez $x-4$ .
$= \frac{4x(x+2) + x(x-4)}{(x-4)(x+2)} =$ $= \frac{4x^2 + 8x + x^2 - 4x}{(x-4)(x+2)} =$ $= \frac{5x^2 + 4x}{(x-4)(x+2)}$	Odejmujemy liczniki, wspólny mianownik przepisujemy.  Upraszczamy licznik.

$$b) \frac{3}{x^2 + x} + \frac{4}{x^2 - x}$$

Rozwiązanie	Komentarz
$x^2 + x = x(x+1)$ $x^2 - x = x(x-1)$ $\frac{3}{x(x+1) \cdot x-1} + \frac{4}{x(x-1) \cdot x+1} =$ $= \frac{3(x-1)}{x(x-1)(x+1)} + \frac{4(x+1)}{x(x-1)(x+1)} =$	<p>Wyrażenia sprowadzamy do wspólnego mianownika. Aby znaleźć najmniejszy wspólny mianownik rozkładamy oba mianowniki na czynniki.</p> <p>Najmniejszym wspólnym mianownikiem jest <math>x(x-1)(x+1)</math>. Dlatego wyrażenie <math>\frac{3}{x(x+1)}</math> rozszerzamy przez <math>x-1</math>, natomiast wyrażenie <math>\frac{4}{x(x-1)}</math> przez <math>x+1</math>.</p>
$= \frac{3(x-1) + 4(x+1)}{x(x-1)(x+1)} =$ $\frac{3x - 3 + 4x + 4}{x(x-1)(x+1)} = \frac{7x + 1}{x(x-1)(x+1)}$	<p>Odejmujemy liczniki, wspólny mianownik przepisujemy.</p> <p>Upraszczamy licznik</p>

$$c) \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 + 2x + 1} - 2$$

Rozwiązanie	Komentarz
$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ $\frac{1}{(x-1)(x+1) \cdot x+1} + \frac{1}{(x+1)^2 \cdot x-1} - \frac{2}{1 \cdot (x-1)(x+1)^2} =$ $= \frac{(x+1)}{(x-1)(x+1)^2} + \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} - \frac{2(x-1)(x+1)^2}{(x-1)(x+1)^2} =$	<p>Wyrażenia sprowadzamy do wspólnego mianownika. Aby znaleźć najmniejszy wspólny mianownik rozkładamy oba mianowniki na czynniki.</p> <p>Najmniejszym wspólnym mianownikiem jest <math>(x-1)(x+1)^2</math>. Dlatego wyrażenie <math>\frac{1}{(x-1)(x+1)}</math> rozszerzamy przez <math>x+1</math>, wyrażenie <math>\frac{1}{(x+1)^2}</math> przez <math>x-1</math>, natomiast wyrażenie <math>\frac{2}{1}</math> przez <math>(x-1)(x+1)^2</math>.</p>
$\frac{x+1 + x-1 - 2(x-1)(x+1)^2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{2x - (2x-2)(x^2 + 2x + 1)}{(x-1)(x+1)^2} =$ $\frac{2x - 2x^3 - 4x^2 - 2x + 2x^2 + 4x + 2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{-2x^3 - 2x^2 + 4x + 2}{(x-1)(x+1)^2}$	<p>Wykonujemy działania na licznikach, wspólny mianownik przepisujemy.</p>

**Mnożenie** wyrażeń wymiernych wykonujemy mnożąc przez siebie liczniki oraz mnożąc przez siebie mianowniki.

Jeśli to możliwe przed przystąpieniem do mnożenia, możemy skracać liczniki z mianownikami

Przykład 6.3.2. Wykonaj działanie:  $\frac{x^2 - 3x}{3x + 6} \cdot \frac{x + 2}{x^2 - 9}$

Rozwiązanie	Komentarz
$x^2 - 3x = x(x - 3)$ $3x + 6 = 3(x + 2)$ $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$	Aby skrócić wyrażenie, liczniki i mianowniki rozkładamy na czynniki
$\frac{x^2 - 3x}{3x + 6} \cdot \frac{x + 2}{x^2 - 9} = \frac{x(x - 3)}{3(x + 2)} \cdot \frac{x + 2}{(x - 3)(x + 3)} =$ $= \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{x + 3} = \frac{x}{3x + 9}$	<p>Skracamy wyrażenia <math>x + 2</math> i <math>x - 3</math>.</p> <p>Mnożymy licznik przez licznik oraz mianownik przez mianownik</p>

**Dzielenie** wyrażeń wymiernych zastępujemy mnożeniem pierwszego wyrażenia przez odwrotność drugiego.

Przykład 6.3.3. Wykonaj działanie:  $\frac{2x}{x^2 + x - 2} : \frac{6x^3}{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$

Rozwiązanie	Komentarz
$\frac{2x}{x^2 + x - 2} \cdot \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}{6x^3}$	Zamieniamy dzielenie na mnożenie pierwszego wyrażenia przez odwrotność drugiego.
$x^2 + x - 2$ $a = 1; b = 1; c = -2$ $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$ $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2$ $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$ $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$	<p>Aby skrócić wyrażenie, liczniki i mianowniki rozkładamy na czynniki.</p> <p>Do rozkładu <math>x^2 + x - 2</math> stosujemy wzory <math>\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c</math>  <math>x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}</math>  <math>a(x - x_1)(x - x_2)</math></p>

$x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = x^2(x + 2) + 2(x + 2) = (x + 2)(x^2 + 2)$	Do rozkładu $x^3 + 2x^2 + 2x + 4$ stosujemy metodę grupowania wyrazów
$\begin{aligned} & \frac{2x}{x^2 + x - 2} \cdot \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}{6x^3} = \\ & = \frac{2x}{(x + 2)(x - 1)} \cdot \frac{(x + 2)(x^2 + 2)}{3x^2 \cdot 2x} = \\ & = \frac{1}{x - 1} \cdot \frac{x^2 + 2}{3x^2} = \frac{x^2 + 2}{3x^3 - 3x^2} \end{aligned}$	Skracamy wyrażenia $x + 2$ i $2x$ .  Mnożymy licznik przez licznik oraz mianownik przez mianownik

Wykonując **działania łączne** na wyrażeniach wymiernych musimy pamiętać o kolejności wykonywania działań.

Przykład 6.3.4. Wykonaj działanie:  $\left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x-2}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}\right)$

Rozwiązanie	Komentarz
$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{x \cdot x - 2} - \frac{3}{x - 2 \cdot x}\right) : \left(\frac{1}{x \cdot x} + \frac{4}{x^2}\right) = \\ & = \left(\frac{2(x-2)}{x(x-2)} - \frac{3x}{x(x-2)}\right) : \left(\frac{x}{x^2} + \frac{4}{x^2}\right) = \\ & = \frac{2(x-2) - 3x}{x(x-2)} : \frac{x+4}{x^2} = \\ & = \frac{2x - 4 - 3x}{x(x-2)} : \frac{x+4}{x^2} = \\ & = \frac{-x - 4}{x(x-2)} : \frac{x+4}{x^2} = \end{aligned}$	Wykonujemy działania w nawiasach.  Wspólnym mianownikiem wyrażen $\frac{2}{x}; \frac{3}{x-2}$ jest $x(x-2)$ .  Wspólnym mianownikiem wyrażen $\frac{1}{x}; \frac{4}{x^2}$ jest $x^2$ .
$\begin{aligned} & = \frac{-(x+4)}{x(x-2)} \cdot \frac{x \cdot x}{x+4} = \\ & = \frac{-1}{x-2} \cdot \frac{x}{1} = \\ & = \frac{-x}{x-2} \end{aligned}$	Zamieniamy dzielenie na mnożenie pierwszego wyrażenia przez odwrotność drugiego.  Skracamy wyrażenia $x + 4$ i $x$  Mnożymy licznik przez licznik oraz mianownik przez mianownik

## ĆWICZENIA

Ćwiczenie 6.3.1. (2pkt.) Wykonaj działanie:  $\frac{5x}{3x+3} + \frac{x-1}{2x+2}$

### schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Ustalenie najmniejszego wspólnego mianownika.	1
2	Wykonanie działania	1

Ćwiczenie 6.3.2. (2pkt.) Wykonaj działanie:  $\frac{2}{2x} - \frac{x+2}{3x^2}$

### schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Ustalenie najmniejszego wspólnego mianownika.	1
2	Wykonanie działania	1

Ćwiczenie 6.3.3. (2pkt.) Wykonaj działanie:  $\frac{2x+6}{x^2-6x+9} \cdot \frac{2x-6}{2x^2+12x+18}$

### schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Rozłożenia liczników i mianowników na czynniki.	1
2	Wykonanie działania i przedstawienie wyniku w najprostszej postaci.	1

Ćwiczenie 6.3.4. (2pkt.) Wykonaj działanie:  $\frac{2x^2-32}{12x} : \frac{x^2-4x}{2x^2}$

### schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Rozłożenia liczników na czynniki.	1
2	Wykonanie działania i przedstawienie wyniku w najprostszej postaci.	1

Ćwiczenie 6.3.5. (3pkt.) Wykonaj działanie:  $\left(x - \frac{4x}{x+1} + 1\right) : \left(\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1}\right)$

**schemat oceniania**

<b>Numer odpowiedzi</b>	<b>Odpowiedź</b>	<b>Liczba punktów</b>
1	Wykonanie działania w pierwszym nawiasie.	1
2	Wykonanie działania w drugim nawiasie.	1
3	Wykonanie dzielenia i przedstawienie wyniku w najprostszej postaci.	1